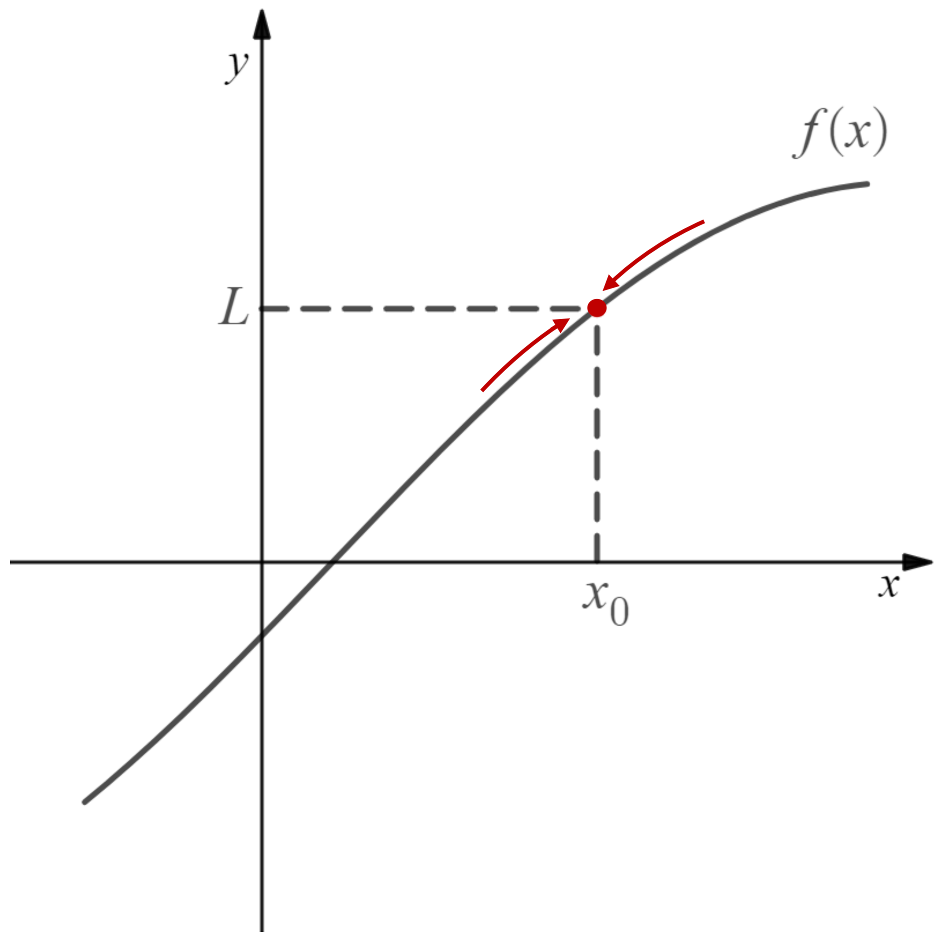
Mathematics
מבינים מתמטיקה

תקציר שיעור גבול של פונקציה

גבול של פונקציה (הגדרה לא פורמלית)

אם כאשר x שואף ל- x_0 בציר ה- x, הפונקציה f שואפת ל- L בציר ה- y, אזי נאמר שהגבול של f שווה ל- L כאשר x שואף ל- x_0.

<u>סימון:</u> $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ או בקצרה $f(x)\xrightarrow{x\to x_0} L$



הגדרה

סביבה של הנקודה x_0 היא הקטע הפתוח (a,b) המכיל את הנקודה x_0.

סביבה נקובה של נקודה x_0 היא הקטע הפתוח (a,b) המכיל את הנקודה x_0, <u>ללא</u> x_0 עצמה.

משפט – גבול של פונקציה אלמנטרית

הפונקציות האלמנטריות מקיימות בתחום הגדרתן, שהגבול בנקודה שווה לערך הפונקציה בנקודה,

כלומר מתקיים: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

משפט יחידות הגבול

אם לפונקציה קיים גבול, אזי הוא יחיד.

משפטי גבול וערך מוחלט

א) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|L\right|$

ב) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=0$

משפט חסומה כפול אפסה

אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ ו- $g(x)$ חסומה בסביבה נקובה של x_0, אזי: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$.

משפט הסנדביץ'

אם לכל x בסביבה נקובה של x_0 מתקיים: $h(x)\le f(x)\le g(x)$

ואם בנוסף $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$, אזי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

משפט הגבול המפורסם

מתקיים הגבול הבא: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

משפט – אריתמטיקה של גבולות

חוקים בסיסיים

תהי פונקציה f המוגדרת בסביבת x_0 (פרט אולי לנקודה x_0 עצמה) ובעלת גבול סופי

$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$ ויהי קבוע c כלשהו, אזי:

א) $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$

ב) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(cf\left(x\right)\right)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=cL$

חוקים עיקריים

תהיינה פונקציות f ו- g המוגדרות בסביבת x_0 (פרט אולי לנקודה x_0 עצמה).

אם הגבולות הבאים קיימים וסופיים: $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L_1$ ו- $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=L_2$, אזי:

א) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=L_1+L_2$

ב) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=L_1L_2$

ג) אם גם $L_2\neq 0$, אזי: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)}{\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)}=\dfrac{L_1}{L_2}$

משפט – אי-שיוויונות בין גבולות

משפט 1

תהיינה f ו- g פונקציות המוגדרות בסביבה נקובה של x_0

ונניח כי קיימים הגבולות: $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=M$, $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$.

אם $L>M$, אזי יש סביבה נקובה של x_0 שבה $f\left(x\right)>g\left(x\right)$.

מסקנה ראשונה $(g(x)=M)$

בפרט אם g פונקציה קבועה $g\left(x\right)=M$, נקבל שאם $L>M$, אזי יש סביבה נקובה של x_0

שבה $f\left(x\right)>M$.

<u>מסקנה שנייה</u> $(M = 0)$

ובפרט אם $M = 0$, נקבל שאם $L > 0$, אזי יש סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x) > 0$.

<u>משפט 2</u>

תהיינה f ו- g פונקציות המוגדרות בסביבה נקובה של x_0

ונניח כי קיימים הגבולות: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

אם $f(x) \ge g(x)$ לכל x בסביבה, אזי $L \ge M$.

<u>מסקנה ראשונה</u> $(g(x) = M)$

בפרט אם g פונקציה קבועה $g(x) = M$, נקבל שאם $f(x) \ge M$ לכל x בסביבה, אזי $L \ge M$.

<u>מסקנה שנייה</u> $(M = 0)$

ובפרט אם $M = 0$, נקבל שאם $f(x) \ge 0$ לכל x בסביבה, אזי $L \ge 0$.